# Termodinâmica - 2/2013

## LISTA 4

**1.** Começando do resultado do problema 5 da lista 3, encontre uma expressão para a temperatura de um sólido de Einstein no limite de baixas temperaturas ($q \ll N$). Inverta esta expressão para encontrar a energia em função da temperatura e mostre que $U = N\epsilon e^{-\epsilon/kT}$, onde $\epsilon$ é o tamanho da unidade de energia.

**2.** Use o resultado do problema 10 da lista 3 para calcular a temperatura de um buraco negro em função de sua massa $M$. (A energia é $Mc^2$.) Calcule o resultado desta expressão para um buraco negro de massa igual à do nosso Sol. Represente graficamente a entropia em função da energia e discuta as consequencias da forma deste gráfico.

**3.** Use o resultado do problema 1 acima para calcular a capacidade térmica de um sólido de Einstein no limite de baixas temperaturas. Represente em gráfico a dependência da capacidade térmica prevista com a temperatura. (Nota: Medidas da capacidade térmica de sólidos reais a baixas temperaturas não confirmam a previsão feita por este modelo. Um modelo mais preciso de sólidos a baixas temperaturas precisa levar em conta a estatística quântica.)

**4.** Um cubo de gelo (massa de 30 g) a $0^o$ C é abandonado na pia da cozinha onde derrete gradualmente. A temperatura da cozinha é $25^o$ C.
(a) Calcule a variação de entropia do cubo de gelo ao longo do processo de derretimento a $0^o$ C descrito acima. (Ignore a pequena variação de volume envolvida.)
(b) Calcule a variação de entropia da água produzida pelo derretimento do gelo em seu aquecimento de $0^o$ C a $25^o$ C.
(c) Calcule a variação de entropia da cozinha produzida pela transferência de energia dela para o gelo e a água (ou pelo calor por ela cedido.)
(d) Calcule a variação de entropia do universo resultante dos processos descritos. Esta variação líquida é positiva, negativa ou nula? Este resultado era esperado por você? Porque, ou porque não?

**5.** Quando o Sol nos ilumina, ele entrega aproximadamente 1000 watts de potência a cada metro quadrado da superfície da Terra. A temperatura da superfície solar é de aproximadamente 6000 K, enquanto a da Terra é cerca de 300 K.
(a) Estime a entropia criada em um ano pelo fluxo de energia solar sobre um metro quadrado da superfície da Terra.
(b) Suponha que você plante grama neste metro quadrado. Algumas pessoas poderiam argumentar que o crescimento da grama (ou de qualquer outro organismo vivo) viola a segunda lei da Termidinâmica, porque nutrientes desorganizados são convertidos numa forma organizada de vida. Como você responderia a este argumento?

**6.** Medidas experimentais da capacidade térmica do alumínio a baixas temperaturas (abaixo de cerca de 50 K) podem ser representadas pela fórmula

$$C_V = aT + bT^3\,,$$

onde $C_V$ é a capacidade térmica de um mol de alumínio, e as constantes $a$ e $b$ valem aproximadamente $a = 0,00135$ J/K$^2$ e $b = 2,48 \times 10^{-5}$ J/K$^4$. A partir destes dados, encontre uma fórmula para a entropia de um mol de alumínio como função da temperatura. Calcule esta entropia com a ajuda da fórmula encontrada para $T = 1$ K e $T = 10$ K, exprimindo seus resultados em unidades convencionais (J/K) e como números adimensionais (dividindo pela constante de Boltzmann). [Comentário: Na forma acima para a capacidade térmica de metais a baixas temperaturas, o termo linear vem da energia associada aos elétrons de condução, enquanto a termo cúbico vem das vibrações da rede cristalina, ou fonons.]

**7.** No problema 10 da lista 2 você usou o teorema do virial para estimar a capacidade térmica de uma estrela. Partindo deste resultado, calcule a entropia de uma estrela, primeiro em função de sua temperatura média e em seguida em função de sua energia total. Faça um gráfico da entropia em função da energia e discuta a forma deste gráfico.

**8.** Partindo da expressão da multiplicidade de um paramagneto de dois estados ideal em função da quantidade de dipolos paralelos ao campo externo $B$, encontre fórmulas para suas energia $U$ e magnetização $M$ em função de sua temperatura $T$.

**9.** Mostre que a entropia de um paramagneto de dois estados ideal, expressa como função da temperatura, é $S = Nk\,[\ln(2\cosh x) - x\tanh x]$, onde $x = \mu B/kT$. Comprove que esta fórmula tem o comportamento esperado quando $T \to 0$ e quando $T \to \infty$.

**10.** A multiplicidade de um sólido de Einstein contendo $N$ osciladores e $q$ unidades de energia é aproximadamente

$$\Omega(N,q) \approx \left(\frac{q+N}{q}\right)^q \left(\frac{q+N}{N}\right)^N .$$

(a) Parta desta fórmula e ache uma expressão para a entropia de um sólido de Einstein como função de $N$ e $q$.
(b) Use o resultado do item (a) para obter a temperatura de um sólido de Einstein em função de sua energia. (A energia é $U = q\epsilon$, onde $\epsilon$ é uma constante.) Simplifique a expressão obtida ao máximo possível.
(c) Inverta a relação encontrada no item (b) para obter a energia como função da temperatura, e use esta última para obter uma fórmula para a capacidade térmica do sistema.
(d) Mostre que, no limite $T \to \infty$, a capacidade térmica é $C = Nk$. (Dica: Quando $x$ é muito pequeno, $e^x \approx 1 + x$.) Este resultado era esperado por você? Explique seu raciocínio.
(e) Deduza uma aproximação mais precisa para a capacidade térmica a altas temperaturas, incluindo termos de ordem $x^3$ na expansão das exponenciais e expandindo cuidadosamente o denominador. Jogue fora termos menores que $(\epsilon/kT)^2$ na resposta final. Depois de tudo feito, você deve encontrar $C = Nk[1 - \frac{1}{12}(\epsilon/kT)^2]$.